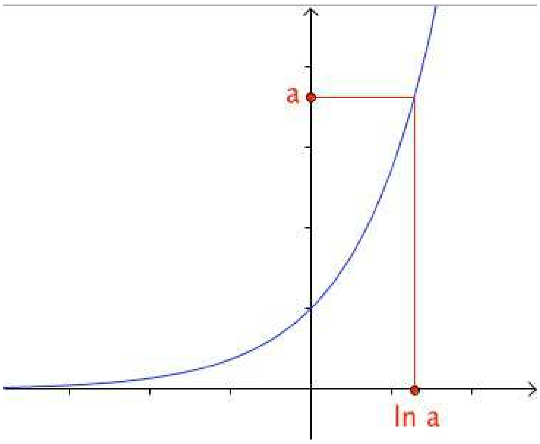
LOGARITHME

Énonce

La fonction exponentielle est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, à valeurs dans $]0;+\infty[$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, pour tout réel a de $]0;+\infty[$ l'équation $e^x = a$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.



Définition : On appelle logarithme népérien d'un réel strictement positif a, l'unique solution de l'équation $e^x = a$. On la note $\ln a$.
La fonction logarithme népérien, notée **ln**, est la fonction :

$$\begin{aligned} \ln :]0;+\infty[&\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

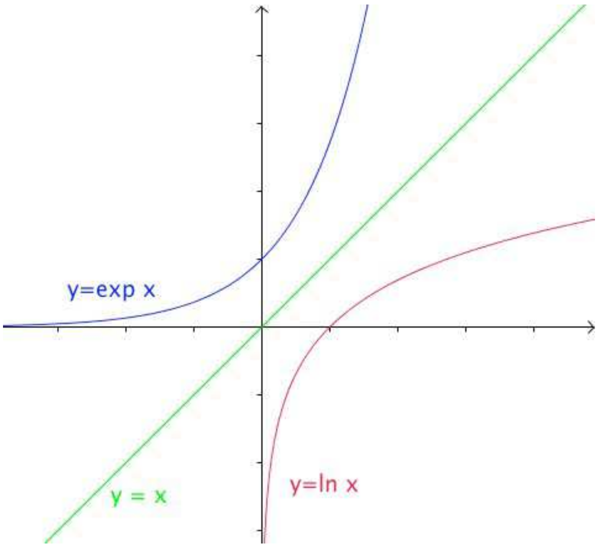
Remarques :

- Les fonctions exp et ln sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

- Les courbes représentatives des fonctions exp et ln sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

- Dans le domaine scientifique, on utilise la fonction logarithme décimale, notée **log** est définie par :

$$\log(x) = \frac{\ln x}{\ln 10}$$



Conséquences :

a) $y = \ln x \text{ avec } x > 0 \Leftrightarrow x = e^y$

b) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $\ln \frac{1}{e} = -1$

c) Pour tout x, $\ln e^x = x$

d) Pour tout x strictement positif, $e^{\ln x} = x$

Démonstrations :

a) Par définition

b) - Car $e^0 = 1$

- Car $e^1 = e$

- Car $e^{-1} = \frac{1}{e}$

c) Si on pose $y = e^x$, alors $x = \ln y = \ln e^x$

d) Si on pose $y = \ln x$, alors $x = e^y = e^{\ln x}$

II. Propriété de la fonction logarithme népérien

1) Relation fonctionnelle

Théorème : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a : $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Démonstration :

$e^{\ln(x\times y)} = x \times y = e^{\ln x} \times e^{\ln y} = e^{\ln x + \ln y}$

Donc $\ln(x \times y) = \ln x + \ln y$

Remarque : Cette formule permet de transformer un produit en somme.

Ainsi, celui qui aurait à effectuer 36 x 62, appliquerait cette formule, soit :
log(36 x 62) = log(36) + log(62) ≈ 1,5563 + 1,7924 (voir table ci-contre)

L'addition étant beaucoup plus simple à effectuer que la multiplication, on trouve facilement :
log(36 x 62) ≈ 3,3487

En cherchant dans la table, le logarithme égal à 3,3487, on trouve 2232, soit : 36 x 62 = 2232.

x	$log(x)$
1	0
2	0,3010
3	0,4771
…	
34	1,5315
35	1,5441
36	1,5563
…	
62	1,7924
…	
2231	3,3485
2232	3,3487
2233	3,3489
…	

2) Conséquences

Corollaires : Pour tous réels x et y strictement positifs, on a :

a) $\ln \frac{1}{x} = -\ln x$

b) $\ln \frac{x}{y} = \ln x - \ln y$

c) $\ln \sqrt{x} = \frac{1}{2} \ln x$

d) $\ln x^n = n \ln x$ avec n entier relatif

III. Etude de la fonction logarithme népérien

1) Continuité et dérivabilité

Propriété : La fonction logarithme népérien est continue sur $\left]0;+\infty\right[$.