# EQUATIONS DIFFERENTIELLES

## I Définition et notation

**Définition 1:** On appelle dérivée seconde de $f''(x)$ la dérivée de $f'(x)$, elle même dérivée de $f(x)$.
On définit ainsi la dérivée d'ordre $n$ de $f$, notée $f^{(n)}$.

**Définition 2 :** Une équation différentielle d'ordre $n$ est une équation où l'inconnue est une fonction $f(x)$ et qui fait intervenir la dérivée d'ordre $n$ de $f$ et éventuellement $x$, $f(x)$ et les dérivées intermédiaires.

**Exemple :** Equation différentielle du 1er ordre

: Equation différentielle du 2nd rdre

:

**Notation** En écriture différentielle, on note $f'(x)=$
En fait, pour simplifier l'écriture des équations différentielles:

les fonctions sont souvent symbolisées par des lettres: *x, a, y* pour *x(t), a(t), y(t)*

la variable est notée soit *t* soit *x*: *y* et *a* seront interprétés comme y(t), a(t) ou y(x), a(x)

on peut être mené à utiliser l'écriture différentielle: $y'=$ ou $y'=$ et $y''=$

**Définitions :**

Résoudre une équation différentielle d'ordre n sur un intervalle *I*, c'est **trouver toutes les fonctions dérivables n fois** sur *I* solution de l'équation.
Quand ces solutions ont toutes la même forme, $k\ e^x$ par exemple avec *k* réel quelconque, on peut donner cette forme générale appelée **solution générale de l'équation** (seul k varie d'une solution à l'autre).

**Remarque** : Dans les cas simples du type y'= g(x), les solutions sont toutes les primitives de g(x).

## II Equations à variables séparables

Il s'agit des équations où on peut séparer ce qui concerne *y*, *y'*, ... d'un côté de l'équation et ce qui concerne *x* de l'autre.

**Exemples**
1. $y'y = 1$ 2. $y'y^2 = x$ 3. $y' = y^2$ 4. $y' = y + y^2$

**Contre-exemple :** $y' = \sin(xy)$
**Méthode générale de résolution**

L'équation s'écrit :

$y'g(y) = f(x)$ avec *f* et *g* deux fonctions d'une variable.

Si on connait une primitive $G$ de $g$, et une primitive $F$ de $f$, alors l'équation équivaut à

$$G(y) = F(x) + C$$

Une fonction $f$, définie sur un intervalle $I$, est solution de l'´equation différentielle si et seulement si il existe une constante $C$ telle que pour tout $x$ dans $I$, on a $G(f(x)) = F(x) + C$

**Remarque :** Attention, il ne suffit pas de mettre les $y$ $y'$ à gauche et les $x$ à droite, il faut que la partie gauche soit vraiment sous forme $y0g(y)$. Par exemple, l'équation 3 pourrait s'écrire $y' - y = 0$, on a bien les $y'$ à gauche, mais ça n'est pas sous la bonne forme, on ne sait pas résoudre ainsi (il n'y a pas de formule générale pour une primitive de $y' - y$).

## III EQUATIONS DIFFERENTIELLES LINEAIRES DU PREMIER ORDRE $a(t)\, x' + b(t)\, x = c(t)$

### 1/ Définitions

**Définition 1:** Soit un intervalle $I$ de $\mathbb{R}$ et $a(t), b(t)$ *et* $c(t)$ trois fonctions continues sur $I$
. Soit une fonction $y(t)$: $I$ Ë

On dit que $y$ est une solution de l′équation différentielle linéaire de premier ordre: $(E)\ ay'+by=c$ ssi :
$y$ est dérivable sur $I$
pour tout $t$ de $I$, $y$ vérifie $(E)$.

On note $S_I$ l′ensemble des solutions de $(E)$ sur $I$.

**Définition 2**:

- Résoudre ($E$) sur $I$ c′est trouver toutes les solutions sur $I$.
- On appelle courbe intégrale de $E$ les courbes représentatives des solutions de ($E$).
- L′équation $(E)\ y'+by=c$ où $a$=1 est dite normalisée.
- L′équation $(E_0)\ ay'+by=0$ est appelée équation sans second membre.

### 2/ Solution générale de l'équation différentielle sans second membre $ay' + by = 0$

**Théorème :** Soit l'équation différentielle $\mathbf{y' + ay = 0}$ avec $a$ une fonction continue sur $I$. La solution générale de cette équation sur I est :

$$y_0 = k\ e^{-A(t)}$$ où $A(t)$ est une primitive de $a(t)$ sur $I$ et $k$ un réel quelconque.

### 2/ Résolution de l'équation avec second membre

**Théorème :** La solution générale de l'équation différentielle ($E$) $\mathbf{ay' + by = c}$ s'obtient en ajoutant à la solution générale de l'équation sans second membre ($E0$) $\mathbf{ay' + by = 0}$ **une solution particulière de l'équation (*E*).**

**Démonstration:**

**Exemple :** Résoudre **(E4)** $\mathbf{y' - 2y = 1-2x}$ et **(E5)** $\mathbf{y' - 2y = e^{-x}}$ ( sol. part. de la forme: $e^{-x}$)

### 3/ Méthode de variation de la constante

**Méthode de variation de la constante**:

**Etape 1 :** Trouver la solution générale de (*E0*) ***a(t) x' + b(t) x* = 0, soit** $y_0$**=** ***k e***$^{-G(t)}$

**Etape 2 :** Pour trouver une solution particulière de (*E*) on pose ***(t) = z(t) e***$^{-G(t)}$ (on remplace la constante k par une fonction *z*(*t*)) et on recherche *(t)* solution particulière de (*E*). On remplace alors et ' par cette fonction dans (*E*) et on détermine *z(t)*. On a ' = *(z'(t) – z(t) G'(t))* $e^{-G(t)}$.

**Etape 3 :** La solution générale de (1) est alors ***y*** = *k* ***e***$^{-G(t)}$ **+ *(t)* avec *k* réel**

**Exemple :** Résoudre (E6) $y' + x\,y = x^2 e^{-x}$

### 4/ Problème de Cauchy

Une fois la solution générale de l'équation différentielle déterminée, il est souvent nécessaire de trouver la solution *y* vérifiant certaines conditions initiales. Cette recherche est appelé le problème de Cauchy.

**Théorème:** Soit *I* un intervalle de $\mathbb{R}$. *a* et *b* deux fonctions continues sur I. Il existe une solution et une seule vérifiant l'e.d. $y'+ay=b$ *et* $y(x_0)=y_0$

## III Equations Linéaires du second ordre à coefficients constants: $ay''+by'+cy = d$

On cherche à résoudre sur *I* les e.d. $ay''+by'+cy=d$ avec *a,b,c* trois réels et *d* une fonction continue sur *I*.

### 1/ Résolution de l'équation sans second membre

**Propriété:** Soit l'équation ($E_0$) $ay''+by'+cy=0$, *a,b et c* trois réels.

On appelle équation caractéristique de cette équation différentielle l'équation : $a\ ^2+b\ +c=0$

Trois cas sont possibles:

- **Si >0,** on note $_1$ et $_2$ les racines du polynôme.
  La solution générale de ($E_0$) est alors : $C_1e^{\ _1x}\quad C_2e^{\ _2x}$, $C_1$ *et* $C_2$ étant 2 réels

- **Si =0,** on note $_0$ la racine double du polynôme.
  La solution générale de ($E_0$) est alors : $(C_1x\quad C_2)e^{\ _0x}$, $C_1$ *et* $C_2$ étant 2 réels

- **Si <0,** on note $+i$ *et* $-i$ les 2 racines complexes du polynôme.
  La solution générale de ($E_0$) est alors : $(C_1\cos(\ x)\quad C_2\sin(\ x))e^{\ x}$, $C_1$ *et* $C_2$ étant 2 réels

**Démonstration**:
**Exemples:** Résoudre *(E1)* $y''+3y'+2y=0$ *(E2)* $y''+2y'+y=0$ *(E3)* $y''+y'+y=0$

### 2/ Solution de l'équation différentielle avec second membre.

**Propriété**: La solution générale de l'équation :

$ay''+by'+cy=d$, avec $a,b,c$ réels et $d$ une fonction continue sur $I$

est la somme d'une solution particulière de ($E$) et de la solution générale de l'équation sans second membre:

$$ay''+by'+cy=0$$

### 3/ Problème de Cauchy

**Théorème:** L'équation $ay''+by'+cy=d$ possède une unique solution vérifiant la condition initiale: $y(x_0)=y_0$ *et* $y'(x_0)=y'_0$

**Exemple**: Résoudre $y''+y=x^2+2$ avec $\underline{y(0)=0 \text{ et } y'(0)=0}$

## IV Résolution approchée d'une équation différentielle

### 1/ Méthode d'Euler

Pour $h$ proche de 0, on a $y(a+h)$ $y(a) + h\,y'(a)$.

Nous allons utiliser cette approximation affine pour construire pas à pas une fonction vérifiant une équation différentielle du premier ordre et passant par un point donné $(x_0,y_0)$.

Soit l'équation différentielle définie par $y'=f(x,y)$ et les conditions initiales $(x_0,y_0)$.

En $(x_0,y_0)$, on connaît la pente de la tangente à partir de l'équation différentielle, $f(x_0,y_0)$
On assimile alors sur l'intervalle $[x_0,x_0+h]$ la fonction à sa tangente.

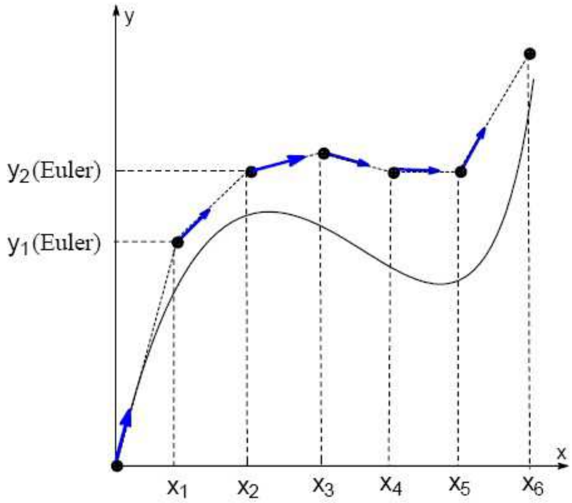
On détermine alors le point $(x_1,y_1)$ avec $x_1=x_0+h$ et $y_1= y_0+h\,f(x_0,y_0)$

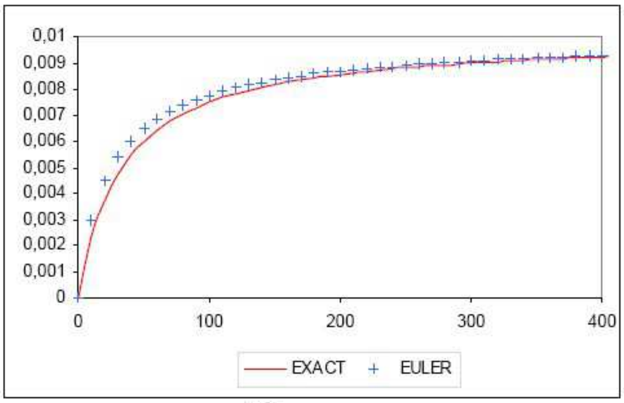
On recommence le même raisonnement avec le point $(x_1,y_1)$ .

On poursuit en construisant la suite de points $(x_n,y_n)$ et en assimilant la courbe à une application affine par morceau.

**Exemple** : Construire la courbe intégrale de $y'+y=x$ vérifiant $y(0)=0$ avec un pas $h=0.5$.

**Remarque :** La convergence de la méthode est de l'ordre de .




$$\frac{dx}{dt} = k \times (a - x)^2$$

### 2/ Méthode de Runge Kutta

Soit l'équation différentielle définie par $y'=f(x,y)$ et les conditions initiales $(x_0,y_0)$.

La méthode de Runge Kutta d'ordre 4 (la plus classique) est définie par la suit de points $(x_n,y_n)$ vérifiant :

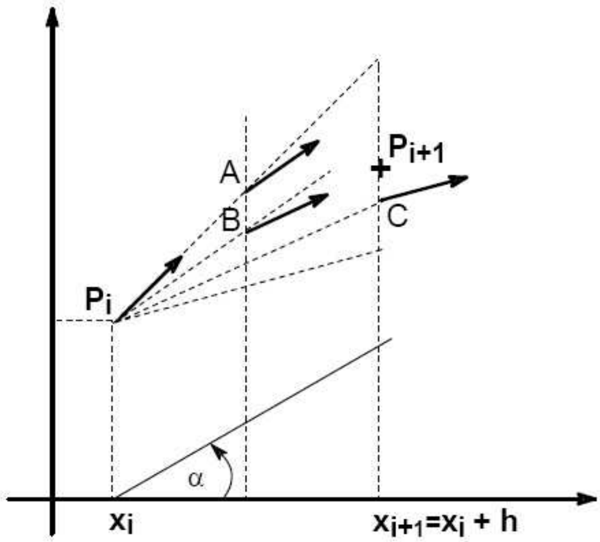
$$y_{n\ 1} \quad y_n \quad h(k_1 \quad 4k_2 \quad k_3)/6$$

$$k_1 \quad f(x_n, y_n)$$

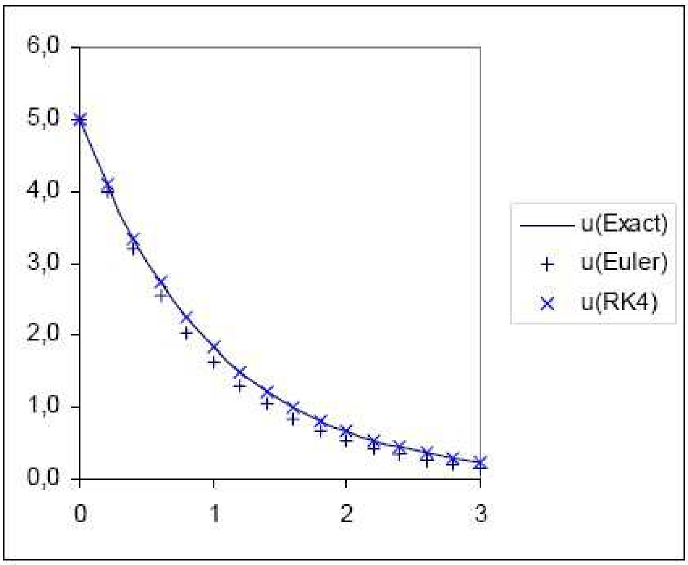
$$k_2 \quad f(x_n \quad h/2, y_n \quad hk_1/2) \qquad \text{et } x_{n+1}=x_n+h$$

$$k_3 \quad f(x_n \quad h, y_n \quad hk_1 \quad 2hk_2)$$

Cette méthode améliore notablement la convergence du calcul, de l'ordre de ·




$$tg\alpha = \frac{1}{6}\left[\left(\frac{dy}{dx}\right)_i + 2\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{iA} + 2\times\left(\frac{dy}{dx}\right)_{iB} + \left(\frac{dy}{dx}\right)_{iC}\right]$$




$$\frac{du}{dt} = -\frac{1}{RC}u$$