MATHEMATIQUES

Etude des fonctions

1. **Generalites sur les fonctions usuelles**
   - Le sens de variation d'une fonction f

   Soit une fonction f définie sur un intervalle I.
   Plusieurs possibilités sont envisageables sur cet intervalle :
   - soit f est croissante,
   - soit f est décroissante,
   - soit f est strictement croissante,
   - soit f est strictement décroissante.

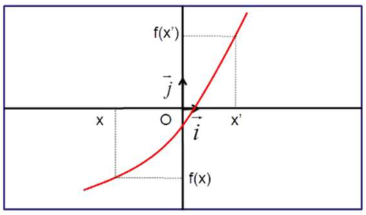
   Nous allons voir maintenant comment étudier ce sens de variation.

1.1 Représentation graphique

La représentation graphique d'une fonction ou courbe représentative
Soit f une fonction et soit Df son ensemble de définition.
Dans un repère, l'ensemble des points M de coordonnées (x, f(x)) où x décrit Df est appelé courbe représentative ou représentation graphique de la fonction f.
On la note Cf et on dit que Cf a pour équation y=f(x).

1.2 Fonctions croissantes

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .
On dit que :
- f est croissante sur I si pour tous x et x' dans I on a : si $x < x'$ alors $f(x) \leq f(x')$
- f est strictement croissante sur I si pour tous x et x' dans I on a :
si $x < x'$ alors $f(x) < f(x')$

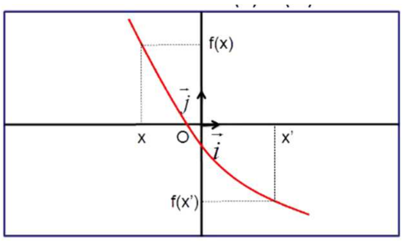


Si une fonction est croissante ou strictement croissante, les images sont rangées dans le même ordre que les antécédents.
On dit que f conserve l'ordre.

1.3 Fonctions décroissantes

Soit une fonction f définie sur un intervalle I .
On dit que :
- f est décroissante sur I si pour tous x et x' dans I on a : si $x < x'$ alors $f(x) \geq f(x')$
- f est strictement décroissante sur I si pour tous x et x' dans I on a :
si $x < x'$ alors $f(x) > f(x')$

Si une fonction est décroissante ou strictement décroissante, les images sont rangées dans l'ordre inverse des antécédents.
On dit que f inverse l'ordre.



2. Dérivée

Définitions : Soit f une fonction définie sur un intervalle I.
On dit que f est dérivable sur I si elle est dérivable en tout réel x de I.
Dans ce cas, la fonction qui à tout réel x de I associe le nombre dérivé de f en x est appelée fonction dérivée de f et se note f'.

Formules de dérivation des fonctions usuelles :

Fonction f	Ensemble de définition de f	Dérivée f'	Ensemble de définition de f'
$f(x)=a,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=0$	$\mathbb{R}$
$f(x)=ax,\ a\in\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=a$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^2$	$\mathbb{R}$	$f'(x)=2x$	$\mathbb{R}$
$f(x)=x^n$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}$	$f'(x)=nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$
$f(x)=\dfrac{1}{x}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\dfrac{1}{x^n}$ $n\geq 1$ entier	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$	$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}\setminus\{0\}$
$f(x)=\sqrt{x}$	$[0;+\infty[$	$f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0;+\infty[$

Formules d'opération sur les fonctions dérivées :

u et v sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I.

$u+v$ est dérivable sur I	$(u+v)'=u'+v'$
ku est dérivable sur I, où k est une constante	$(ku)'=ku'$
uv est dérivable sur I	$(uv)'=u'v+uv'$
$\dfrac{1}{u}$ est dérivable sur I, où u ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$
$\dfrac{u}{v}$ est dérivable sur I, où v ne s'annule pas sur I	$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

Théorème : Soit une fonction f définie et dérivable sur un intervalle I.
- Si $f'(x)\leq 0$, alors f est décroissante sur I.
- Si $f'(x)\geq 0$, alors f est croissante sur I.

3. Intégrale

La fonction intégrale est une opération mathématique fondamentale qui permet de calculer l'aire sous une courbe dans un intervalle donné. Elle est notée généralement par le symbole ∫ et est utilisée dans le domaine du calcul intégral.

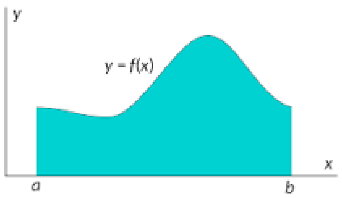
L'intégrale peut egalement être considérée comme l'opération inverse de la dérivation. Alors que la dérivation mesure le taux de variation instantané d'une fonction, l'intégrale permet de trouver la somme cumulative des variations de cette fonction.

Il existe deux types d'intégrales couramment utilisées :

L'intégrale indéfinie : Elle permet de trouver une fonction appelée primitive (ou antiderivée) d'une fonction donnée. L'intégrale indéfinie est représentée par ∫f(x) dx, où f(x) est la fonction à intégrer et dx représente l'élément différentiel (généralement la variable d'intégration).

L'intégrale définie : Elle permet de calculer la valeur numérique de l'aire sous une courbe entre deux limites spécifiées. L'intégrale définie est notée comme suit : ∫[a, b] f(x) dx, où a et b représentent les bornes d'intégration

Comment calculer l'intégrale d'une fonction ?



La principale méthode pour calculer une intégrale passe par la notion de primitive d'une fonction. La « primitivation » est l'opération qui, à partir d'une fonction f, donne une fonction F dérivable et dont la dérivée est égale à f : F'(x) = f(x).

4. Fonctions sinusoidales

4.1 DÉFINITION

Une fonction sinusoïdale, généralement de la variable t (temps) s'exprime par:

$$f_1(t) = \hat{A}\ \sin\ (\omega t + \varphi) \quad \text{ou encore} \quad f_2(t) = \hat{A}\ \cos\ (\omega t + \varphi) \text{ où:}$$

Â représente **l'amplitude** de la sinusoïde (on la note également A_m pour A maximum)

(oméga) représente **la pulsation** (exprimée en radians par seconde rad/s) proportionnelle à la fréquence $\omega = 2\pi$ **f** (une fréquence de 50 Hz donne une pulsation de 1 00 π = 314 rad/s)

(Phi) représente **la phase** à l'origine; elle s'exprime en Radians (rad)

elle peut également se noter Φ (Phi majuscule) ψ (Psy minuscule) ou Ψ (Psy majuscule)

Rque: $(\omega t + \varphi) = \theta$ représente un angle exprimé en **Radians**; il est souvent plus aisé d'exprimer les phases à l'origine en degrés; toutefois il ne faut pas oublier de les convertir en radians avant d'entrer les valeurs dans les formules; pour convertir on doit se souvenir que **360°** (un tour complet de cercle) équivaut à **2**π radians, d'où: φ **(rad)** $= \varphi$ **(°)** x $2\pi / 360$

On définit **la période T** l'intervalle de temps au bout duquel la fonction se reproduit identiquement à elle-même; on dit alors que la fonction est périodique.

Les fonctions sinus et cosinus sont définies à 2π près, soit 360°

La période angulaire est donc $\mathbf{T_{ang} = 2\pi}$ ou **360°**

On en déduit la valeur de la **période temporelle** (exprimée en secondes):

$$T_{ang} = 2\pi = \omega T \quad \Rightarrow \quad \boxed{T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{1}{f}}$$

4.2 NOTION DE DÉPHASAGE

Nous avons remarqué que la phase à l'origine d'une sinusoïde correspond à l'avance ou au retard de son passage par la valeur zéro. Cette notion est très relative car elle dépend de l'instant que l'on a choisi comme origine des temps.

Sur un oscilloscope, l'instant du passage par zéro dépend du réglage de la synchro; on peut le modifier à sa convenance.

Par contre l'écart angulaire entre deux sinusoïdes **de même fréquence** correspond à une donnée caractéristique intéressante.

Si on pose $\Phi = (\varphi_1 - \varphi_2)$ le décalage angulaire entre deux sinusoïdes, on remarque que cette valeur ne dépend pas de l'instant choisi pour origine.

On appelle Φ le déphasage que l'on peut mesurer à l'oscilloscope indépendamment du réglage de synchro.

Pour deux sinusoïdes de même fréquence le déphasage reste constant quel que soit l'instant d'observation.

4.3 PRODUIT DE SINUSOÏDES: NOTION DE PUISSANCE

La puissance électrique est définie comme le **produit** de l'intensité du courant I(t) par la tension U(t)

soit: $I(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$ et $U(t) = \hat{U}\sin(\omega t + \varphi_u)$

d'où: $P(t) = \hat{U}.\hat{I}.\sin(\omega t + \varphi_u).\sin(\omega t + \varphi_i)$

on rappelle les formules de trigonométrie:

```
cos a . cos b = 1/2 [ cos (a+b) + cos (a-b) ]
sin a . sin b = 1/2 [ cos (a-b) - cos (a+b)]
sin a . cos b = 1/2 [ sin (a+b) + sin (a-b) ]
```

on peut remarquer que l'expression entre crochets comporte un terme invariant au cours du temps

$[\cos(\varphi_u - \varphi_i)]$ et un terme variable au cours du temps $[\cos(2\omega t + \varphi_u + \varphi_i)]$ de pulsation 2ω

c'est à dire de fréquence **2f**.

si on se souvient que les fonctions sinusoïdales du temps ont une valeur moyenne nulle, on déduit aisément l'expression de la puissance moyenne:

$$P_{moy} = {}^1/_2\ \hat{U}.\hat{I}.[\cos(\varphi_u - \varphi_i)]$$

en posant $\Phi = (\varphi_u - \varphi_i)$ le déphasage du courant par rapport à a tension: $P_{moy} = {}^1/_2\ \hat{U}.\hat{I}.\cos\Phi$

soit:

$$\boxed{P = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}\,\frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}\cos\Phi = U_{eff}\, I_{eff}\cos\Phi}$$

avec: $U = \frac{\hat{U}}{\sqrt{2}}$ $\quad I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}$

qui représentent les valeurs efficaces de la tension et du courant sinusoïdale

4.4 VALEUR EFFICACE

La loi d'Ohm appliquée à une résistance pure donne **U = R.I** pour un courant continu.

De même, si on considéré un courant alternatif comme une succession d'états pseudo-continus, on peut appliquer la loi d'Ohm aux valeurs instantanées des grandeurs alternatives: U(t) = R.I(t)

Si: $I(t) = \hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$ alors $U(t) = R.I(t) = R.\hat{I}\sin(\omega t + \varphi_i)$

La puissance électrique instantanée s'exprime alors:

$P(t) = U(t).I(t) = R.\hat{I}^2.\sin^2(\omega t + \varphi_i) = {}^1/_2\ R.\hat{I}^2.\ [\cos(0) - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$ $P(t) = {}^1/_2\ R.\hat{I}^2.\ [1 - \cos(2\omega t + 2\varphi_i)]$

la puissance moyenne vaut donc: $P_{moy} = {}^1/_2\ R.\hat{I}^2$

on appelle puissance active la puissance moyenne dissipée

afin d'adopter une notation unifiée pour le courant continu et le courant alternatif, on pose:

$P_{act} = R.I_{eff}^2 = {}^1/_2\ R.\hat{I}^2$

en identifiant les deux expressions, on déduit: $\mathbf{I_{eff}^2 = {}^1/_2\ \hat{I}^2}$

d'où: $\boxed{I = \frac{\hat{I}}{\sqrt{2}}}$

On définit la valeur efficace d'un courant alternatif (ou d'une tension) comme la valeur d'un courant continu équivalent qui produirait dans une même résistance R la même puissance dissipée par effet Joule (échauffement).

L'expression de la valeur efficace donnée ci-dessus ne s'applique qu'au courant alternatif **sinusoïdal**

et ne s'applique pas aux autres formes d'ondes (carré, triangle, quelconque).

C'est pourquoi il faut utiliser une autre méthode de calcul dans le cas général.

Fin.